数理解析研究所講究録
318巻 1978年 63-89

Klein群の安定性について

阪市大・理　　佐官　謙一

序．　non-elementary有限生成Klein群の擬等角変形空間は，Bers[4]によって1970年に初めて明確に論じられたように思われる．それはまた，Maskit[14]及びKra[10]によっても論じられた．Bers[4]では，Teichmüller空間論に関わる様々な議論，結果は言うまでもなく，extremal擬等角写像に関するいくつかの結果(Bers[5]およびそこに引用された文献参照)もまた本質的な役割を果たしている．Maskit[14]及びKra[10]では，extremal擬等角写像は議論の表面に現れず，その代わりにMaskit's Identity Theorem([14]の主定理)と呼ばれる擬等角写像に関する新しい種類の定理が重要な役割を果たしている．

そのMaskitの結果を顧慮して，Bers[4]は

"すべての有限生成Klein群はquasi-stable(擬安定)である."

と予想した．数年後Kruškal′[11]は，この予想に肯定的に答えた．しかし，そこに展開された議論を検証することは容易で

はないように思われる.

ここでは, B-groupsに対してはこの予想が正しいことを, Kruškal'とはかなり違った方法で示してみたい. あわせて, 有限生成Klein群のquasiconformal stability(擬等角安定性)に関することにも言及したい(付記参照).

1. 3種類のstabilityの定義. Riemann球 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の等角自己同型の全体はMöbius群Möbをなす. Möbの各元 α は $z\to\alpha(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ とかける. 従ってMöbは $SL(2,\mathbb{C})/\pm id$ (ここに id は $SL(2,\mathbb{C})$ の単位元)と同型である複素3次元Lie群と考えられる.

G を有限生成Klein群, $\Omega=\Omega(G)$ をその不連続領域, $\Lambda=\Lambda(G)$ をそのlimit setとする. $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ を G の一組の生成元, $\chi: G\to$ Möb を準同型とする. そのとき χ は点 $(\chi(\gamma_1),\chi(\gamma_2),\cdots,\chi(\gamma_k))\in(\text{Möb})^k$ によって表わされ, 従って準同型 $\chi: G\to$ Möb の全体 $\mathrm{Hom}(G,\text{Möb})$ は $(\text{Möb})^k$ の部分集合と考えてよい. すべてのparabolic $\gamma\in G$ に対し $(\mathrm{trace}\,\chi(\gamma))^2=4$ をみたす $\chi\in\mathrm{Hom}(G,\text{Möb})$ はparabolicと呼ばれる. parabolicな $\chi\in\mathrm{Hom}(G,\text{Möb})$ の全体を $\mathrm{Hom}_p(G,\text{Möb})$ であらわす. 類似に, $\Omega(G)/G$ のpuncturesに対応するすべてのparabolic $\gamma\in G$ に対

し $(\mathrm{trace}\,\chi(\gamma))^2=4$ をみたす $\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Möb})$ を $\Omega(G)$-parabolic と，ここでは呼ぶことにする．$\Omega(G)$-parabolic な $\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Möb})$ の全体を $\mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G,\mathrm{Möb})$ であらわす．

G に関する Beltrami coefficients からなる集合を $M(G)$ であらわす．すなわち

$$M(G)=\left\{\mu\in L_\infty(\mathbb{C})\ ;\ \begin{array}{l}(1.1)\ \mu(\gamma z)\,\overline{\gamma'(z)}/\gamma'(z)=\mu(z),\ \gamma\in G,\\ (1.2)\ \mu|\Lambda(G)=0,\quad (1.3)\ \|\mu\|<1\end{array}\right\},$$

ここに $L_\infty(\mathbb{C})$ は L_∞ ノルム $\|\ \|$ が有限な $\mathbb{C}$ 上の可測函数のなす複素Banach空間である．$\mu\in L_\infty(\mathbb{C}),\ \|\mu\|<1$, に対し，Beltrami方程式 $w_{\bar z}(z)=\mu(z)\,w_z(z)$ の解で3点 $0,1,\infty$ を不動点にもつ $\hat{\mathbb{C}}$ の自己位相同型（一意に存在する）を w^μ であらわす．上記条件(1.1)は $w^\mu G(w^\mu)^{-1}\subset\mathrm{Möb}$ がなりたつことと必要十分であることが容易に確められる．

G の擬等角変形とは準同型 $\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Möb})$ で

$G\ni\gamma\to\chi(\gamma)=\alpha\circ w^\mu\circ\gamma\circ(\alpha\circ w^\mu)^{-1}$, $\alpha\in\mathrm{Möb}$, $\mu\in M(G)$ の形で与えられるものをいう．G の擬等角変形の全体は $\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Möb})$ の部分集合 $\mathrm{Hom}_{qc}(G,\mathrm{Möb})$ をなす．(α,μ), $\alpha\in\mathrm{Möb}$, $\mu\in M(G)$ を準同型 $\chi:\ G\ni\gamma\to\chi(\gamma)=\alpha\circ w^\mu\circ\gamma\circ(\alpha\circ w^\mu)^{-1}$ へうつす自然な上への写像 $\Phi_G:\mathrm{Möb}\times M(G)\to\mathrm{Hom}_{qc}(G,\mathrm{Möb})$ を定義できるが，それは正則写像である(Bers [3],[4] 参照)．ここで

$$\mathrm{Hom}_{qc}(G,\mathrm{Möb})\subset\mathrm{Hom}_p(G,\mathrm{Möb})\subset\mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G,\mathrm{Möb})\subset\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Möb})\subset(\mathrm{Möb})^k$$

であることを注意する．またGの生成元のとり方の変化によって，$\mathrm{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$, $\mathrm{Hom}_{p}(G, \text{Möb})$, $\mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G, \text{Möb})$ は各々それ自身と双有理双正則なものにうつるだけであるから，下記する定義はすべてwell-defined，すなわちGの生成元のとり方に依存しないことにも注意しておく．

Gを有限生成Klein群，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ を任意に選び固定したGの一組の生成元とする．その仮定下に次の定義を与える．

定義1．$M(G)$の原点0の任意の開近傍Nに対し，$(\text{Möb})^k$ における$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$の開近傍Uで $U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times N)$ をみたすものが存在するときGはquasi-stable(擬安定)であると呼ばれる．

定義2．$(\text{Möb})^k$における$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$の開近傍Uで $U \cap \mathrm{Hom}_{p}(G, \text{Möb}) \subset \mathrm{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ をみたすものが存在するときGはquasiconformally stable(擬等角安定)であるという．

定義3．$(\text{Möb})^k$における$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$の開近傍Uで $U \cap \mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G, \text{Möb}) \subset \mathrm{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ をみたすものが存在するとき，ここではGは$\Omega(G)$-parabolicな意味でquasiconformally stable($\Omega(G)$-parabolicな意味で擬等角安定)であると呼ぶこと

にする．

定義２はBers[3]にのべられたquasiconformal stabilityより形の上では強い条件であるが，両方の定義が同値であることが容易に確められる．Gardiner-Kra[7]では定義３の条件をみたすGをquasiconformally stableであると呼んでいる．

２． いくつかの補題． GをKlein群とする．Gの不連続領域$\Omega=\Omega(G)$の成分をGの成分と呼ぶ．Gの成分Δに対するcomponent subgroup G_ΔとはΔを不変にするGのmaximal subgroupのこととする．$G_\Delta=G$をみたすGの成分ΔはGの不変成分と呼ばれる．不変成分をもつKlein群はfunction group (函数群)と呼ばれる．

Ahlforsの有限性定理(Kra[9]のVII章及びそこに引用された文献参照)により，Gが有限生成ならばGのnon-conjugateな成分のなすfinite complete list $\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$が存在して$\Omega(G)/G=S_1+S_2+\cdots+S_n$ (disjoint union)がなりたつ，ここに各$S_i=\Delta_i/G_{\Delta_i}$, $1\leq i\leq n$, は有限型のRiemann面である．この定理の副産物として，Gの任意の成分Δに対するcomponent subgroup G_ΔはΔを不変成分にもつ有限生成函数群であること

がAhlfors [2]の補題2によって知られている．従ってGの各成分Δの境界$\partial\Delta$がG_Δのlimit set $\Lambda(G_\Delta)$と一致することも容易に確められる．

補題1．Gを有限生成Klein群，ΔをGの成分，G_ΔをΔに対するcomponent subgroupとする．fをΔ上で定義された擬等角写像で$f\circ\gamma(z)=\gamma\circ f(z)$, $z\in\Delta$, $\gamma\in G_\Delta$ をみたすとする．そのとき$f(\Delta)=\Delta$ である．

証明．先ず$f(\Delta)\subset\Omega(G_\Delta)$を示す．もしも$G_\Delta$が有限群ならば，明らかに$f(\Delta)\subset\Omega(G_\Delta)=\hat{\mathbb{C}}$．$G_\Delta$が無限群でしかも$f(\Delta)\cap\Lambda(G_\Delta)\neq\phi$と仮定する．このとき$G_\Delta$のloxodromicまたはparabolicな元の不動点からなる集合は$\Lambda(G_\Delta)$でdenseであり，$f(\Delta)$は$\hat{\mathbb{C}}$の空でない開集合であるから，G_Δのあるloxodromicまたはparabolicな元γ_0の不動点ζ_0で$\zeta_0\in f(\Delta)\cap\Lambda(G_\Delta)$ をみたすものが存在する．また，仮定より$\gamma\circ f^{-1}(\zeta)=f^{-1}\circ\gamma(\zeta)$, $\zeta\in f(\Delta)$, $\gamma\in G_\Delta$ がなりたつ．従って$\gamma_0\circ f^{-1}(\zeta_0)=f^{-1}(\zeta_0)$ がなりたち$f^{-1}(\zeta_0)$はG_Δのloxodromicまたはparabolicな元γ_0の不動点であるから$f^{-1}(\zeta_0)\in\Lambda(G_\Delta)$．一方，明らかに$f^{-1}(\zeta_0)\in\Delta\subset\Omega(G_\Delta)$がなりたつ．この矛盾は$f(\Delta)\subset\Omega(G_\Delta)$がなりたつことを示している．

G_Δの各元γはΔ上fと可換なのでγは$f(\Delta)$を不変にする．かくして$f(\Delta)$はG_Δで不変な，$\Omega(G_\Delta)$の空でない連結開集合であ

ることがわかる．従って $f(\Delta)$ を含む G_Δ の不変成分 Δ_1 が存在する．$f(\Delta)/G_\Delta$ も Δ_1/G_Δ もともに有限型の Riemann 面であり，その punctures は G_Δ の parabolic な元に対応し $f(\Delta)/G_\Delta \subset \Delta_1/G_\Delta$ がなりたつ．このとき[2]の補題2と同様にして $f(\Delta)=\Delta_1$ を示すことができる．

$f(\Delta)\neq\Delta$ と仮定する．そのときすでに注意したことより，G_Δ は2つの不変成分 Δ と $f(\Delta)$ とをもつ有限生成函数群である．かくして Maskit[13]の定理2により G_Δ は quasi-fuchs 群であり，Δ の境界及び $f(\Delta)$ の境界は，ともに quasi-circle であり G_Δ の limit set $\Lambda(G_\Delta)$ と一致する。このとき f は $\Delta\cup\partial\Delta$ から $f(\Delta)\cup\partial(f(\Delta))$ の上への位相同型写像に拡張される (Lehto — Virtanen[12]参照)．その拡張されたものをも f であらわす．さて Kra [10]の補題1及び Maskit[14]の系2の証明と同様にして矛盾を導くことができる．実際，$z_0\in\Lambda(G_\Delta)=\partial\Delta$ を G_Δ のある元 γ の attractive な不動点とする．そのとき高々4点を除いたすべての $z\in\Delta$ に対し $f(z_0)=\lim_{n\to\infty} f\circ\gamma^n(z)=\lim_{n\to\infty}\gamma^n\circ f(z)=z_0$。
そのような点 z_0 は $\Lambda(G_\Delta)$ で dense に存在するから $f(z)=z$ がすべての $z\in\Lambda(G_\Delta)=\partial\Delta$ に対しなりたつ．かくして f は quasi-fuchs 群 G_Δ の不変成分 Δ を G_Δ のもう一方の不変成分 $f(\Delta)$ にうつし，$\Lambda(G_\Delta)=\partial\Delta=\partial(f(\Delta))$ 上では $f(z)=z$ をみたすから，f は orientation を保ち得ない．このことは，f が擬等角写

像であることに矛盾する．この矛盾は $f(\Delta)=\Delta$ がなりたつことを示している．

補題 2．G を有限生成 Klein 群，Δ を G の成分，w を $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型で G と compatible，すなわち $wGw^{-1}\subset$ Möb をみたすものとする．f を Δ 上で定義された擬等角写像で G_Δ と compatible で $f\circ\gamma(z)=w\circ\gamma\circ w^{-1}\circ f(z)$, $z\in\Delta$, $\gamma\in G_\Delta$, をみたすとする．そのとき $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F で，F は f の拡張であり，また F は w の $\hat{\mathbb{C}}-\bigcup_{\gamma\in G}\gamma(\Delta)$ への制限 $w|\hat{\mathbb{C}}-\bigcup_{\gamma\in G}\gamma(\Delta)$ の拡張でもあり，$F\circ\gamma(z)=w\circ\gamma\circ w^{-1}\circ F(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$ をみたすものが存在する．

証明．仮定により Δ 上の擬等角写像 $w^{-1}\circ f$ は，恒等式 $w^{-1}\circ f\circ\gamma(z)=\gamma\circ w^{-1}\circ f(z)$, $z\in\Delta$, $\gamma\in G_\Delta$ をみたす．従って補題 1 より $f(\Delta)=w(\Delta)$ がなりたつ．さて $\Omega(G)$ 上 $F(z)$ を次のように定義する．$z\in\Omega(G)-\bigcup_{\gamma\in G}\gamma(\Delta)$ に対しては $F(z)=w(z)$ とおき，$z\in\gamma(\Delta)$, $\gamma\in G$ に対しては $F(z)=w\circ\gamma\circ w^{-1}\circ f\circ\gamma^{-1}(z)$ とおく．F は well-defined である．何故ならば，もしも $\gamma_1(\Delta)=\gamma_2(\Delta)$, $\gamma_1,\gamma_2\in G$ ならば，そのとき $\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1\in G_\Delta$ であり $z=\gamma_1(\zeta)$, $\zeta\in\Delta$ とあらわすことにより

$$
\begin{aligned}
w\circ\gamma_2\circ w^{-1}\circ f\circ\gamma_2^{-1}(z) &= w\circ\gamma_2\circ w^{-1}\circ f\circ\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1(\zeta)\\
&= w\circ\gamma_2\circ w^{-1}\circ w\circ\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1\circ w^{-1}\circ f(\zeta)\\
&= w\circ\gamma_1\circ w^{-1}\circ f\circ\gamma_1^{-1}(z) \qquad \text{を得るから．}
\end{aligned}
$$

$f(\Delta)=w(\Delta)$ がなりたつので $F(\gamma(\Delta))=w(\gamma(\Delta))$, $\gamma\in G$ を得る．

かくして $w^{-1}\circ F$ は $\Omega(G)$ 上で定義された擬等角写像で $\Omega(G)$ をそれ自身の上へうつす. $w^{-1}\circ F\circ\gamma(z)=\gamma\circ w^{-1}\circ F(z)$, $z\in\Omega(G)$, $\gamma\in G$ がなりたつことは容易に確められる. このことは, $w^{-1}\circ F$ が Maskit's Identity Theorem ([4]の主定理)の条件をみたすことを意味している. 従ってその定理により, $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 W で $w^{-1}\circ F$ の拡張であり $\Lambda(G)$ 上 $W(z)=z$ をみたすものが存在する. 故に, $\Lambda(G)$ 上 $F(z)=w(z)$ とおくことにより F が補題にいう性質をもつことが容易に確められる.

補題3. G を Klein 群, F と w とを G と compatible な $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型で $F\circ\gamma\circ F^{-1}(z)=w\circ\gamma\circ w^{-1}(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$ をみたすとする. もしも w の complex dilatation μ_w が $\mu_w|\Lambda(G)=0$ をみたせば, そのとき μ_F もまた $\mu_F|\Lambda(G)=0$ をみたす. ここに $\mu_w|\Lambda(G)=0$ は, $\Lambda(G)$ のほとんどすべての点 z で $\mu_w(z)=0$ がなりたつことを意味する.

証明. $\hat{G}=FGF^{-1}$ とおくと, そのとき $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 $F\circ w^{-1}$ は $F\circ w^{-1}\circ\hat{\gamma}(z)=\hat{\gamma}\circ F\circ w^{-1}(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\hat{\gamma}\in\hat{G}$ をみたす. このとき補題1の証明で示したようにして $\Lambda(\hat{G})$ 上で $F\circ w^{-1}(z)=z$ がなりたつことがわかる. そのとき, 平面集合のほとんどすべての点はその集合の point of density であること及び $F\circ w^{-1}$ は absolutely continuous on lines([2]参照)であることを用いて

$\Lambda(\hat{G})$のほとんどすべての点zで$\partial(F\circ w^{-1})(z)/\partial\bar{z}=0$がなりたつことがわかる([14]の系3の証明参照). とくに(2.1) $\mu_{F\circ w^{-1}}|\Lambda(\hat{G})=0$ がわかる. 他方 $z=w(\zeta)$ とおくと (2.2) $\mu_{F\circ w^{-1}}(z)=\dfrac{\mu_F(\zeta)-\mu_w(\zeta)}{1-\mu_F(\zeta)\overline{\mu_w(\zeta)}}e^{2i\arg w_\zeta(\zeta)}$がなりたつ([12]参照). 仮定により (2.3) $\mu_w|\Lambda(G)=0$がなりたつ. 明らかに $w(\Lambda(G))=\Lambda(\hat{G})$ がなりたつから, (2.1), (2.2) 及び (2.3) により $\mu_F|\Lambda(G)=0$.

Gを不変成分Δをもつ有限生成函数群とする. Δ/G の punctures に対応するすべてのparabolic $\gamma\in G$に対し $(\mathrm{trace}\,\chi(\gamma))^2=4$ をみたす$\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Möb})$の全体からなる集合を$\mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}p}(G,\mathrm{Möb})$ であらわす. また t を $0<t<1$ をみたす任意の実数とし, 次の条件

(2.4) Δ上で定義された擬等角写像fで$f\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ f(z)$, $z\in\Delta$, $\gamma\in G$, 及び$\|\mu_f\|<t$ をみたすものが存在する, ここにμ_fはfのΔ上のcomplex dilatation,

をみたす$\chi\in\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Möb})$の全体からなる集合を, ここでは$\mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}qc}(G,\mathrm{Möb};t)$ であらわすことにする.

補題4. Gを不変成分Δをもつ有限生成函数群, $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$を$G$の一組の生成元とする. そのとき, Gが擬安定であることと, 任意のt, $0<t<1$, に対し$(\mathrm{Möb})^k$における$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$の開

近傍Uで$U\cap \mathrm{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})\subset \mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}qc}(G,\text{Möb};t)$をみたすものが存在することとは必要十分である．

証明．任意に与えられたt，$0<t<1$，に対し$N=\{\mu\in M(G);\|\mu\|<t\}$とおくと，明らかに$\Phi_G(\text{Möb}\times N)\subset \mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}qc}(G,\text{Möb};t)$がなりたつ．よって必要性は擬安定性の定義から従う．

逆に十分性を示すために，Nを$M(G)$の原点0の任意に与えられた開近傍とする．$N=\{\mu\in M(G);\|\mu\|<t_0\}$，ここに$t_0$は$0<t_0<1$をみたすある実数と仮定してよい．仮定から$(\text{Möb})^k$における$(\gamma_1,\gamma_2,---,\gamma_k)$の開近傍$U$で

(2.5) $U\cap \mathrm{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})\subset \mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}qc}(G,\text{Möb};t_0)$

をみたすものが存在する．必要があれば(2.5)のUを十分小さいものでおきかえ$U\cap \mathrm{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})\subset \Phi_G(\text{Möb}\times N)$がなりたつことを示せば十分である．

Gは有限生成だからすでにのべたようにGのnon-conjugateな成分からなるfinite complete list $\{\Delta_0=\Delta,\Delta_1,---,\Delta_\ell\}$ (possibly $\ell=0$)が存在して，$\ell\geqq 1$ならば各component subgroup G_{Δ_i}，$1\leqq i\leqq \ell$，は不変成分Δ_iとΔを含む別な不変成分とをもつ有限生成函数群である．かくして$\ell\geqq 1$ならば，[3]の定理2によってG_{Δ_i}，$1\leqq i\leqq \ell$，は有限生成quasi-fuchs群であり，従って擬安定である([3],[4]参照)．

$\ell\geqq 1$と仮定する．各i，$1\leqq i\leqq \ell$，に対し$\gamma_{i1},\gamma_{i2},---,\gamma_{in_i}$を$G_{\Delta_i}$の一

組の生成元とする．そのとき各 γ_{ij}, $1\leqq i\leqq \ell$, $1\leqq j\leqq n_i$, は $(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k)$ に関するある word $\omega_{ij}=\omega_{ij}(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k)$ によって $\gamma_{ij}=\omega_{ij}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$ とあらわされる．各 i, $1\leqq i\leqq \ell$, に対し $(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k)\in(\text{Möb})^k$ を $(\omega_{i1}(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k),\omega_{i2}(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k),\cdots,\omega_{in_i}(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k))\in(\text{Möb})^{n_i}$ へうつす正則写像 $\Psi_i:(\text{Möb})^k\longrightarrow(\text{Möb})^{n_i}$ を定義できる． $\chi\in\text{Hom}(G,\text{Möb})$ に対し，明らかに $\Psi_i(\chi)=\chi|G_{\Delta_i}$ がなりたつ．

$N_i=\{\mu\in M(G_{\Delta_i})\,;\,\|\mu\|<t_0\}$ とおく．各 G_{Δ_i}, $1\leqq i\leqq \ell$, は擬安定なので，$(\text{Möb})^{n_i}$ における $(\gamma_{i1},\gamma_{i2},\cdots,\gamma_{in_i})$ の開近傍 U_i で $U_i\cap\text{Hom}_{qc}(G_{\Delta_i},\text{Möb})\subset\Phi_{G_{\Delta_i}}(\text{Möb}\times N_i)$ をみたすものが存在する．また (2.5) の U は，すべての i, $1\leqq i\leqq \ell$, に対し $\Psi_i(U)\subset U_i$ をみたすと仮定してよい，そのとき $\Psi_i(\text{Hom}_{qc}(G,\text{Möb}))\subset\text{Hom}_{qc}(G_{\Delta_i},\text{Möb})$ に注意して，$\Psi_i(U\cap\text{Hom}_{qc}(G,\text{Möb}))\subset U_i\cap\text{Hom}_{qc}(G_{\Delta_i},\text{Möb})\subset\Phi_{G_{\Delta_i}}(\text{Möb}\times N_i)$ がわかる．このことは，任意の $\chi\in U\cap\text{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})$ に対し $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 f_i で $f_i\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ f_i(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G_{\Delta_i}$, および $\|\mu_{f_i}\|<t_0$ をみたすものが存在することを意味する．
$\chi\in\text{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})$ なので，$w\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ w(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$, 及び $\mu_{w|\Lambda(G)}=0$ をみたす $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 w が存在する．
さて，この w と $f_1|\Delta_1$ に補題2を適用すると，$f_1|\Delta_1$ 及び $w|\hat{\mathbb{C}}-\bigcup_{\gamma\in G}\gamma(\Delta_1)$ の拡張であり $F_1\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ F_1(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$ をみたす $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F_1 が存在することがわかる．とくに F_1 は $\|\mu_{F_1|\bigcup_{\gamma\in G}\gamma(\Delta_1)}\|=\|\mu_{f_1|\Delta_1}\|<t_0$ をみたす．そしてまた $\mu_{w|\Lambda(G)}=0$ が

なりたつから補題3により $\mu_{F_1|\Lambda(G)}=0$ がわかる．この F_1 と $f_2|\Delta_2$ とに再び補題2を適用して，$\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F_2 で $F_2\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ F_2(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$, $\|\mu_{F_2|\bigcup_{\gamma\in G}\gamma(\Delta_1\cup\Delta_2)}\|<t_0$, 及び $\mu_{F_2|\Lambda(G)}=0$ をみたすものが存在することがわかる．F_{i-1} と $f_i|\Delta_i$, $2\leqq i\leqq l$, とにこの過程をくりかえして，ついには $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F_l で $F_l\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ F_l(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$, $\|\mu_{F_l|\Omega(G)-\Delta}\|<t_0$, および $\mu_{F_l|\Lambda(G)}=0$ をみたすものが存在する．

さて (2.5) によって Δ 上の擬等角写像 f で $f\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ f(z)$, $z\in\Delta$, $\gamma\in G=G_\Delta$, 及び $\|\mu_f\|<t_0$ をみたすものが存在する．F_l と f に今一度補題2を適用することにより，$\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F で $F\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ F(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$, $\mu_{F|\Lambda(G)}=0$, および $\|\mu_{F|\Omega(G)}\|<t_0$ をみたすものが存在する．このことは $\mu_F\in N$ を意味し，従って $\chi\in\Phi_G(\text{Möb}\times N)$ を得る．$\chi\in U\cap\text{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})$ の選び方は任意であったから $U\cap\text{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})\subset\Phi_G(\text{Möb}\times N)$ を得る．すなわち G は擬安定である．

$l=0$ の場合の証明は本質的に上の議論に含まれる．

3．　B-groups の擬安定性．　D を Riemann 球 $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない開集合でその補集合が2点より多くの点を含むとする．G は D を不変にする Klein 群とする．pair (D,G) を

configuration (D, G) と呼ぶ(Bers [5] 参照).

configuration (D, G) に関する(正則)2次微分とは，$\phi(\gamma(z))\gamma'(z)^2=\phi(z)$, $\gamma\in G$ をみたす D 上の正則函数 ϕ のことである．$\|\phi\|_A=\iint_{D/G}|\phi(z)|dxdy<\infty$ をみたすとき ϕ は integrable と呼ばれ，$\|\phi\|_B=\|\lambda_D^{-2}\phi\|=\sup_{z\in D}\lambda_D^{-2}(z)|\phi(z)|<\infty$ をみたすとき ϕ は bounded と呼ばれる，ここに $\lambda_D(z)|dz|$ は D 上の Poincaré 計量である．(D, G) に関する integrable な(正則)2次微分の全体は，ノルム $\| \|_A$ を伴って複素 Banach 空間 $A(D, G)$ をなす．(D, G) に関する bounded な(正則)2次微分の全体は，ノルム $\| \|_B$ を伴って複素 Banach 空間 $B(D, G)$ をなす．D/G が有限型ならば $A(D, G)$ は $B(D, G)$ と一致して有限次元であることが知られている(例えば Kra [9] の III 章参照)．(D, G) に関する bounded かつ integrable な(正則)2次微分を，(D, G) に関する cusp form という．特に G が non-elementary 有限生成 Klein 群ならば，Ahlfors の有限性定理より $(\Omega(G), G)$ に関する cusp forms は有限次元複素 Banach 空間 $A(\Omega(G), G)=B(\Omega(G), G)$ をなす．$B(\Omega(G), G)$ の次元を $\sigma(G)$ であらわす．

単連結不変成分をもつ non-elementary 有限生成 Klein 群を B-group と呼ぶ．

補題5．G を単連結不変成分 Δ をもつ B-group，w と $\tilde{f}$ と

をGとcompatibleな$\hat{\mathbb{C}}$の擬等角自己同型とする．hを$\tilde{f}(\Delta)$上で定義された局所的に位相同型な有理型函数で

(3.1) Schwarzian derivative $\{h,z\}=\left(\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)^2,\ z\in\tilde{f}(\Delta),$

はconfiguration $(\tilde{f}(\Delta),\tilde{f}G\tilde{f}^{-1})$に関するcusp formであり，

(3.2) $h\circ\tilde{f}\circ\gamma(z)=w\circ\gamma\circ w^{-1}\circ h\circ\tilde{f}(z),\quad z\in\Delta,\ \gamma\in G$ をみたすとする．

そのときhは単葉である．

証明．$k: U\to\tilde{f}(\Delta)$を等角写像とする，ここにUは上半平面をあらわす．$\tilde{G}=\tilde{f}G\tilde{f}^{-1}$, $\Gamma=k^{-1}\tilde{G}k$ とおく．U/Γは有限型のRiemann 面$\tilde{f}(\Delta)/\tilde{G}$と等角同値だから，$\Gamma$は有限生成第一種fuchs 群である．(3.2) より (3.3) $h\circ k\circ\Gamma=h\circ\tilde{G}\circ k=h\circ\tilde{f}\circ G\circ\tilde{f}^{-1}\circ k=w\circ G\circ w^{-1}\circ h\circ k$ がなりたつ．かくして$h\circ k$は$\chi(\Gamma)=wGw^{-1}$をみたす準同型$\chi:\Gamma\to$Möb をひきおこし，$(\chi, h\circ k)$はΓのdeformation (その正確な定義はKra [8]参照)であることがわかる．

先ず，$h\circ k(U)\neq\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を示す．$h\circ k(U)=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$と仮定し$U_1=(h\circ k)^{-1}(w(\Delta))$ とおく．そのとき(3.3)を顧慮することにより，U_1はΓで不変なUの真部分集合であることがわかる．明らかに$U_1/\Gamma\subset U/\Gamma$ がなりたち，$U/\Gamma\left(\cong w(\Delta)/wGw^{-1}\right)$及び$U_1/\Gamma$はともに有限型のRiemann 面であり，そのpuncturesはΓのparabolicな元に対応する．かくして[2]の補題2と同様な方法によって$U_1=U$ がなりたつことがわかる．これはU_1がUの真部分集合であることに矛盾する．従って (3.4) $h\circ k(U)\neq\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ がわかる．

さらには(3.1)とNehari[17]の定理Iより

$$\sup_{z\in U}\lambda_U^{-2}(z)|\{h\circ k, z\}| \leqq \sup_{z\in U}\lambda_U^{-2}(z)|\{h, kz\}||k'(z)|^2+\sup_{z\in U}\lambda_U^{-2}(z)|\{k, z\}|$$
$$=\sup_{\zeta\in\tilde{f}(\Delta)}\lambda_{\tilde{f}(\Delta)}^{-2}(\zeta)|\{h,\zeta\}|+\sup_{z\in U}\lambda_U^{-2}(z)|\{k, z\}|<\infty .$$

かくして(3.5) $\{h\circ k, z\}\in B(U,\Gamma)$がわかる．

さて，有限生成第一種fuchs群Γのdeformation $(\chi, h\circ k)$は(3.4)及び(3.5)をみたすことがわかった．従ってKra [8]の定理1より，$h\circ k$はunramified, unbounded covering mappingであり，$h\circ k(U)$はB-group $\chi(\Gamma)=wGw^{-1}$の不変成分であり特に単連結である．故に$h\circ k$は単葉でなければならない．従ってhは単葉である．

定理1．すべてのB-groupsは擬安定である．

証明．Gを単連結不変成分ΔをもつB-group，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$を$G$の一組の生成元とする．そのときGardiner-Kra[7]の定理11.2の証明の中から次の事実をひきだすことができる．

各t，$0<t<1$，に対し$(\mathrm{M\ddot{o}b})^k$における$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$の開近傍$U$で次の性質をみたすものが存在する；

各$\chi\in U\cap \mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}p}(G,\mathrm{M\ddot{o}b})$に対し，$G$とcompatibleな$\hat{\mathbb{C}}$の擬等角自己同型$\tilde{f}$と$\tilde{f}(\Delta)$上の局所的に位相同型な有理型函数$h$で次の条件

(3.6) Schwarzian derivative $\{h, z\}$, $z\in\tilde{f}(\Delta)$, は$(\tilde{f}(\Delta), \tilde{f}G\tilde{f}^{-1})$

に関する cusp form,

(3.7) $h\circ\tilde{f}\circ\gamma(z)=\chi(\gamma)\circ h\circ\tilde{f}(z)$, $z\in\Delta$, $\gamma\in G$, および

(3.8) $\|\mu_{\tilde{f}}\|<t$

をみたすものが存在する．

$\chi\in U\cap \mathrm{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})\,(\subset U\cap \mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}p}(G,\text{Möb}))$ と仮定する．そのとき $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 w で $w\circ\gamma\circ w^{-1}(z)=\chi(\gamma)(z)$, $z\in\hat{\mathbb{C}}$, $\gamma\in G$, をみたすものが存在する．(3.7) より $h\circ\tilde{f}\circ\gamma(z)=w\circ\gamma\circ w^{-1}\circ h\circ\tilde{f}(z)$, $z\in\Delta$, $\gamma\in G$, がわかる．かくして，このとき補題5より h は単葉であり，従って (3.7) と (3.8) より $\chi\in \mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}qc}(G,\text{Möb};t)$ がわかる．$\chi\in U\cap \mathrm{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})$ の選び方は任意であるから，$U\cap \mathrm{Hom}_{qc}(G,\text{Möb})\subset \mathrm{Hom}_{\Delta\text{-}qc}(G,\text{Möb};t)$ がなりたつ．故に，補題4より G は擬安定である．

4. 擬安定性と同値ないくつかの条件． この節では，non-elementary 有限生成 Klein 群の擬安定性と同値な条件をいくつか与える．

G を non-elementary 有限生成 Klein 群とする．$B(\Omega(G),G)$ は configuration $(\Omega(G),G)$ に関する bounded (正則) 2次微分からなる複素 Banach 空間であり，その次元を $\sigma(G)$ であらわしたことを思いおこす．$\|\lambda_{\Omega}^{-2}\varphi\|<1$ をみたす $\varphi\in B(\Omega(G),G)$ に対し

$\mu(z)=\lambda_{\Omega}^{-2}(z)\overline{\varphi(z)}$, $z\in\Omega(G)$ および $\mu|\Lambda(G)=0$ とおく.
$\lambda_{\Omega}^{2}(\gamma(z))\overline{\gamma'(z)}\gamma'(z)=\lambda_{\Omega}^{2}(z)$, $\gamma\in G$ なので $\mu\in M(G)$ がなりたつ. そのような μ を G に関する canonical Beltrami coefficients という. それらは $\sigma(G)$ 次元のあるベクトル空間の単位球 $M_{can}(G)$ をなす.

補題6. G を有限生成Klein群, $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ を G の一組の生成元, $\alpha\in$ Möb とする. $G_1=\alpha G\alpha^{-1}$ とおく. そのとき双正則な上への1対1写像 $Ⓗ:(\text{Möb})^k\to(\text{Möb})^k$ 及び $\tau: M(G)\to M(G_1)$ で次の性質

(4.1) $\tau(0)=0$, $\tau(M(G))=M(G_1)$,

(4.2) $Ⓗ((\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k))=(\alpha\circ\gamma_1\circ\alpha^{-1},\ \alpha\circ\gamma_2\circ\alpha^{-1},\cdots,\alpha\circ\gamma_k\circ\alpha^{-1})$,

$Ⓗ(\mathrm{Hom}_{qc}(G,\text{Möb}))=\mathrm{Hom}_{qc}(G_1,\text{Möb})$, $Ⓗ(\mathrm{Hom}_{p}(G,\text{Möb}))=\mathrm{Hom}_{p}(G_1,\text{Möb})$,

$Ⓗ(\mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G,\text{Möb}))=\mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G_1,\text{Möb})$, および

(4.3) $M(G)$ の任意の部分集合 N に対し

$$Ⓗ(\Phi_G(\text{Möb}\times N))=\Phi_{G_1}(\text{Möb}\times\tau(N)),$$

をみたすものが存在する. 特に G が擬安定または擬等角安定または $\Omega(G)$-parabolic な意味で擬等角安定であることに対応して, G_1 も同じ性質をもつ.

証明. $(\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k)\in(\text{Möb})^k$ に対し $Ⓗ((\tilde{\gamma}_1,\tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_k))=(\alpha\circ\tilde{\gamma}_1\circ\alpha^{-1},\alpha\circ\tilde{\gamma}_2\circ\alpha^{-1},\cdots,\alpha\circ\tilde{\gamma}_k\circ\alpha^{-1})$ で Ⓗ を定義する. $\mu\in M(G)$ に対し $\tau(\mu)(z)=\mu(\alpha^{-1}z)\,\overline{\alpha^{-1\prime}(z)}/\alpha^{-1\prime}(z)$, $z\in\mathbb{C}$ で τ を定義する. $\mu\in M(G)$ に対し $W=w^{\mu}\circ\alpha^{-1}$ とおくと $\mu_W=\tau(\mu)$ がな

りたつ．この容易に確められる事実に注意すると Ⓗ と τ とが上記の性質をもつことを確めるのは難しくない．補題の後半の部分は，これらの性質と3種類の安定性の定義からただちに従う．

注意．さらには，G が non-elementary の場合は $\varphi \in B(\Omega(G), G)$ に対し $\psi(z) = \varphi(\alpha^{-1}(z))(\alpha^{-1\prime}(z))^2$ とおくと $\psi \in B(\Omega(G_1), G_1)$ がなりたつ．この容易に確められる事実に注意すると，$\tau(M_{can}(G)) = M_{can}(G_1)$ がなりたつこともわかる．

補題7．G を non-elementary 有限生成 Klein 群，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ を G の一組の生成元とする．そのとき次の3条件は互いに同値である，

(i) G は擬安定である，

(ii) $M_{can}(G)$ における原点 0 の任意の開近傍 $\tilde{N}$ に対し，$(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ の開近傍 U で $U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \tilde{N})$ をみたすものが存在する，及び

(iii) V を $\text{Möb} \times M_{can}(G)$ における $(id, 0)$ の十分小さい開近傍とすると Φ_G の V への制限 $\Phi_G|V$ は V を $\mathrm{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ のある開近傍の上へ双正則にうつす．とくに，$(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ のある開近傍 U で $U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ が U の $\sigma(G)+3$ 次元(複素解析的)部分多様体となるものが存在

する．

証明．補題6及びその下にのべた注意により3点 $0, 1, \infty$ は各々 G の loxodromic な元 $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*$ の attractive な不動点としてよい．このとき，$M(G)$ の 0 の十分小さい開近傍 $\hat{N}$ を固定すると，連続開写像 $\Pi_\Omega : \hat{N} \to M_{can}(G)$ で $\Pi_\Omega(0) = 0$ 及び $\Phi_G(\mu) = \Phi_G(\Pi_\Omega(\mu))$，$\mu \in \hat{N}$ をみたすものが存在することが Bers [5] の定理1により知られている．G が擬安定であると仮定する．$\tilde{N}$ を $M_{can}(G)$ における与えられた 0 の開近傍とする．そのとき $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ の開近傍 U で $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \Pi_\Omega^{-1}(\tilde{N}))$ をみたすものが存在する．$\Phi_G(\text{Möb} \times \Pi_\Omega^{-1}(\tilde{N})) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \tilde{N})$ であるから，(i) ならば (ii) がなりたつ．擬安定性の定義より明らかに (iii) ならば (i) がなりたつ．かくして (ii) ならば (iii) がなりたつことを示すことだけが残されている．もしも $W = \alpha \circ w^\mu$, $\alpha \in \text{Möb}$, $\mu \in M(G)$ ならば，そのとき α は準同型 $\chi : \gamma \to W \circ \gamma \circ W^{-1}$ により一意にきまる．実際，α は $0, 1, \infty$ を各々 $\chi(\gamma_1^*), \chi(\gamma_2^*)$ および $\chi(\gamma_3^*)$ の attractive な不動点へうつさねばならない．かくして Möb の id の任意の開近傍 W に対し，$(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ の開近傍 U_1 で

(4.4) $U_1 \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(W \times M(G))$ をみたすものが存在する．

$\tilde{N}$ を $M_{can}(G)$ における 0 の開近傍とする．(ii) を仮定する．そのとき $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ の開近傍 U で

(4.5) $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \tilde{N})$ をみたすものが存在する．

$U \subset U_1$と仮定してよい．(4.4)と(4.5)によって
$U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \mathrm{M\ddot{o}b}) \subset \Phi_G(W \times M(G)) \cap \Phi_G(\mathrm{M\ddot{o}b} \times \tilde{N}) \subset \Phi_G(W \times \tilde{N})$ がわかる．
このことは，$\mathrm{M\ddot{o}b} \times M_{can}(G)$の$(id, 0)$の任意の開近傍$V = W \times \tilde{N}$に対し，$(\mathrm{M\ddot{o}b})^k$ における$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ の開近傍Uで

(4.6) $U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \mathrm{M\ddot{o}b}) \subset \Phi_G(V)$をみたすものが存在することを意味する．$\Phi_G$の$\mathrm{M\ddot{o}b} \times M_{can}(G)$への制限$\Phi_G|\mathrm{M\ddot{o}b} \times M_{can}(G)$ は点$(id, 0)$で最大の階数$\sigma(G)+3$ をもつことが，Bers [4]の補題1により知られているので，上記(4.6)は(iii)がなりたつことを示している．すなわち，(ii)ならば(iii)がなりたつ．

5.　安定性に関する評価．　Klein群Gは2次の多項式からなるベクトル空間Πに$p\gamma(z) = p\gamma(z)/\gamma'(z)$, $p \in \Pi$, $\gamma \in G$ で作用する．従って(一次元Eichler) cohomology群　$H^1(G, \Pi) = Z^1(G, \Pi)/B^1(G, \Pi)$を定義できる，ここに$Z^1(G, \Pi)$はcocyclesのなす空間，$B^1(G, \Pi)$はcoboundariesのなす空間である．$p \in Z^1(G, \Pi)$が$G$のすべてのparabolic巡回部分群$G_0$に対し $p|G_0 \in B^1(G_0, \Pi)$をみたすとき，pはparabolic cocyclesのなす空間$PZ^1(G, \Pi)$に属すという．$PH^1(G, \Pi) = PZ^1(G, \Pi)/B^1(G, \Pi)$をparabolic cohomology群という．
類似に，$p \in Z^1(G, \Pi)$ が$\Omega(G)/G$ のpuncturesによってきまるGのすべてのparabolic巡回部分群G_0に対し $p|G_0 \in B^1(G_0, \Pi)$ をみた

すとき，p は $\Omega(G)$-parabolic cocycles のなす空間 $PZ^1_{\Omega}(G,\Pi)$ に属すという．$PH^1_{\Omega}(G,\Pi)=PZ^1_{\Omega}(G,\Pi)/B^1(G,\Pi)$ と定める．定義より，

(5.1) $\dim PH^1(G,\Pi)=\dim PZ^1(G,\Pi)-\dim B^1(G,\Pi)$，および

(5.2) $\dim PH^1_{\Omega}(G,\Pi)=\dim PZ^1_{\Omega}(G,\Pi)-\dim B^1(G,\Pi)$ をうる．

non-elementary Klein 群 G に対しては，いわゆる Bers 写像 $\beta^*: B(\Omega(G),G)\to H^1(G,\Pi)$ は反線形で単射であり，$\beta^*(B(\Omega(G),G))\subset PH^1(G,\Pi)$ がなりたつことがよく知られている (Kra [9] 参照).

Gardiner-Kra は [7] において $\mathrm{Hom}(G,\mathrm{M\ddot{o}b})$ と $H^1(G,\Pi)$ との密接な関係を論じた．ここでは，[7] の中にある結果を少し強い形にして，次の2つの補題としてのべる．その証明は [7] にすでに含まれている．

補題 8．G を有限生成 Klein 群，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ を G の一組の生成元とする．そのとき $(\mathrm{M\ddot{o}b})^k$ における $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$ の開近傍 U，U の $\dim PZ^1(G,\Pi)$ 次元部分多様体 V_1，及び U の $\dim PZ^1_{\Omega}(G,\Pi)$ 次元部分多様体 V_2 で $U\cap \mathrm{Hom}_p(G,\mathrm{M\ddot{o}b})\subset V_1$，$U\cap \mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G,\mathrm{M\ddot{o}b})\subset V_2$ をみたすものが存在する．さらには $(\mathrm{M\ddot{o}b})^k$ における $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$ の開近傍 U に対し，$U\cap \mathrm{Hom}_p(G,\mathrm{M\ddot{o}b})$ 自身が U の部分多様体ならば，それは $\dim PZ^1(G,\Pi)$ 次元であり，また $U\cap \mathrm{Hom}_{\Omega\text{-}p}(G,\mathrm{M\ddot{o}b})$ 自身が U の部分多様体ならば，それは

$\dim PZ^1_{\Omega}(G,\Pi)$ 次元である([7]の定理8.4参照).

注意. non-elementary Klein 群 G に対しては $\dim B^1(G,\Pi)=3$ が知られている(Kra [9]参照). かくして有限生成 non-elementary Klein群 G に対しては, (5.1) と (5.2) より,

(5.3) $\dim PZ^1(G,\Pi)=\dim PH^1(G,\Pi)+3$, および

(5.4) $\dim PZ^1_{\Omega}(G,\Pi)=\dim PH^1_{\Omega}(G,\Pi)+3$ を得る.

補題9. G をnon-elementary 有限生成Klein 群とする. $\beta^*(B(\Omega(G),G))=PH^1(G,\Pi)$ ならば, G は擬等角安定であり擬安定でもある. $\beta^*(B(\Omega(G),G))=PH^1_{\Omega}(G,\Pi)$ ならば, G は $\Omega(G)$-parabolic な意味で擬等角安定であり, 擬安定でもある. さらには G を B-group と仮定すると, G が $\Omega(G)$-parabolic な意味で擬等角安定ならば, $\beta^*(B(\Omega(G),G))=PH^1_{\Omega}(G,\Pi)$ がなりたつ([7]の定理8.4及び定理11.2 の系参照).

上の補題9より良く, 次の定理を得る.

定理2. G をnon-elementary 有限生成Klein 群とする. そのとき, G が擬等角安定でありかつ擬安定であることと $\beta^*(B(\Omega(G),G))=PH^1(G,\Pi)$ がなりたつこととは必要十分である. さらには, G が $\Omega(G)$-parabolic な意味で擬等角安定でありか

つ擬安定であることと $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH^1_{\Omega}(G, \Pi)$ がなりたつこととは必要十分である．

証明．補題9により必要性のみを示せば十分である．Gが擬等角安定でありかつ擬安定であると仮定する．そのとき補題7により，$(\mathrm{M\ddot{o}b})^k$における$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$の開近傍$U$で

$U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \mathrm{M\ddot{o}b})$が$U$の$\sigma(G)+3$次元部分多様体となるものが存在する，ここに$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$は$G$の一組の生成元である．$G$が擬等角安定なので，必要があれば$U$を十分小さいものにおきかえることにより，(5.5) $U \cap \mathrm{Hom}_p(G, \mathrm{M\ddot{o}b}) = U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \mathrm{M\ddot{o}b})$ と仮定してよい．そのとき補題8および(5.4)により$U \cap \mathrm{Hom}_p(G, \mathrm{M\ddot{o}b})$は$U$の$\dim PH^1(G, \Pi)+3$次元部分多様体である．かくして(5.5)によって (5.6) $\sigma(G) + 3 = \dim PH^1(G, \Pi) + 3$ がなりたつことがわかる．β^*は単射であるから，(5.6)は $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH^1(G, \Pi)$ がなりたつことを意味する．

同様にして，Gが$\Omega(G)$-parabolicな意味で擬等角安定でありかつ擬安定ならば，$\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH^1_{\Omega}(G, \Pi)$を得る．

6．応用．　Kを1より大きい正の実数とする．K-擬等角写像の正規族に関する結果([12]のII章の定理5.1及び定理5.2)と，K-擬等角写像による近似に関する結果([12]のIV章の定理5.2)

と前述のこと(補題3, 補題7 等)とを用いて示すことができる次の定理を，証明なしに記す．

定理3． G を擬安定な non-elementary 有限生成 Klein 群，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ を G の一組の生成元とする．そのとき $(\mathrm{M\ddot{o}b})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ の開近傍 U を十分小さくとると，各 $\chi_n \in U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \mathrm{M\ddot{o}b})$ に次の性質をもつ $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 W_n を対応させられる；

(i) $W_n \circ \gamma(z) = \chi_n(\gamma) \circ W_n(z)$, $\gamma \in G$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $\mu_{W_n} \in M_{can}(G)$, および

(ii) 列 $\chi_n \in U \cap \mathrm{Hom}_{qc}(G, \mathrm{M\ddot{o}b})$, $n = 1, 2, \cdots$, が identity isomorphism $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ に収束すれば，球面距離に関し $\hat{\mathbb{C}}$ 上一様に $\lim_{n\to\infty} W_n(z) = z$ がなりたち，また $\lim_{n\to\infty} \mu_{W_n}(z) = 0$ が $\hat{\mathbb{C}}$ でほとんどいたるところなりたつ．

定理4． G を non-elementary 有限生成 Klein 群とする．G が擬等角安定ならば，そのとき $\Lambda(G)$ に support をもつ G に関する Beltrami coefficients は 0 以外に存在しない．

(付記)． [1], [3], [5], [6], [15], [16] のなかのいくつかの結果あるいは証明法を用いて，定理1 を礎にして，定理1 より良く
"すべての有限生成 Klein 群は擬安定である." という予想を肯定できるように思われる．

文　献

[1] W. Abikoff : Constructability and Bers stability of Kleinian groups, Discontinuous Groups and Riemann Surfaces, Ann. of Math. Studies 79(1974), 3-12.

[2] L. V. Ahlfors : The structure of finitely generated Kleinian groups, Acta Math. 122(1969), 1-17.

[3] L. Bers : On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I, Ann. of Math. 91(1970), 570-600.

[4] L. Bers : Spaces of Kleinian groups, Several Complex Variables, I(Maryland, 1970), Lecture Notes on Mathematics 155(Springer-Verlag, 1970), 9-34.

[5] L. Bers : Extremal quasiconformal mappings, Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. of Math. Studies 66(Princeton, 1971), 27-52.

[6] L. R. Ford : Automorphic Functions, 2nd ed., Chelsea, New York, 1951.

[7] F. Gardiner and I. Kra : Stability of Kleinian groups, Indiana University Math. J. 21(1972), 1037-1059.

[8] I. Kra : Deformations of Fuchsian groups, II, Duke Math. J. 38(1971), 499-508.

[9] I. Kra : Automorphic Forms and Kleinian Groups, W. A. Benjamin, 1972.

[10] I. Kra : On spaces of Kleinian groups, Comment. Math. Helv. 47(1972), 53–69.

[11] S. L. Kruškal′ : Stability of Kleinian groups, Soviet Math. Dokl. 15(1974), 822–825.

[12] O. Lehto and K. I. Virtanen : Quasiconformal mappings in the plane domain, Springer-Verlag, 1973.

[13] B. Maskit : On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups II, Ann. of Math. 91(1970), 608–638.

[14] B. Maskit : Self-maps on Kleinian groups, Amer. J. of Math. 93(1971), 840–856.

[15] B. Maskit : Decomposition of certain Kleinian groups, Acta Math. 130(1973), 243–263.

[16] M. Nakada : Cohomology of finitely generated Kleinian groups with an invariant component, J. Math. Soc. Japan 28(1976), 699–711.

[17] Z. Nehari : Schwarzian derivatives and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949), 545–551.